EXERCICE N°1 : 25' 5 points

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.
Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :
* 92 % des jouets sont sans défaut de finition.
* parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité.
* 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.
On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :
* F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
* S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. a. Déterminer p(F) ; p(S / F) et p(S∩ F) .

b. Montrer que = p($\overline{S}$ /$\overline{F}$) = $\frac{1}{4}$

c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

d. Déterminer p(S).

e. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

2. Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 Dinars, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 Dinars.
X = la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.
Y = la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité.
On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

a. Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

b. Calculer l'espérance mathématique de y. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

EXERCICE N°2 : 25' 5 points

1) On considère l'équation différentielle : $(E): y' - y = -\frac{1}{1+e^{-x}}$

a) Déterminer la solution de l'équation différentielle $(E_0): y' - y = 0$, *qui prend la valeur* 1 *en* 0

b) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ *et soit g la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^x g(x)$

Montrer que : f est une solution de (E) si et seulement si: pour tout x∈R on a : $g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

c) En déduire la solution f de (E) telle que $f(0) = Ln2$

2) Soit la fonction f définie $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^x Ln(1+e^{-x})$

a) Montrer que : $\forall t \geq 0\ on a : 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$. En déduire que $\forall t \geq 0\ on a : t - \frac{t^2}{2} \leq Ln(1+t) \leq t$

b) Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}\ on a : 1 - \frac{e^{-x}}{2} \leq f(x) \leq 1$

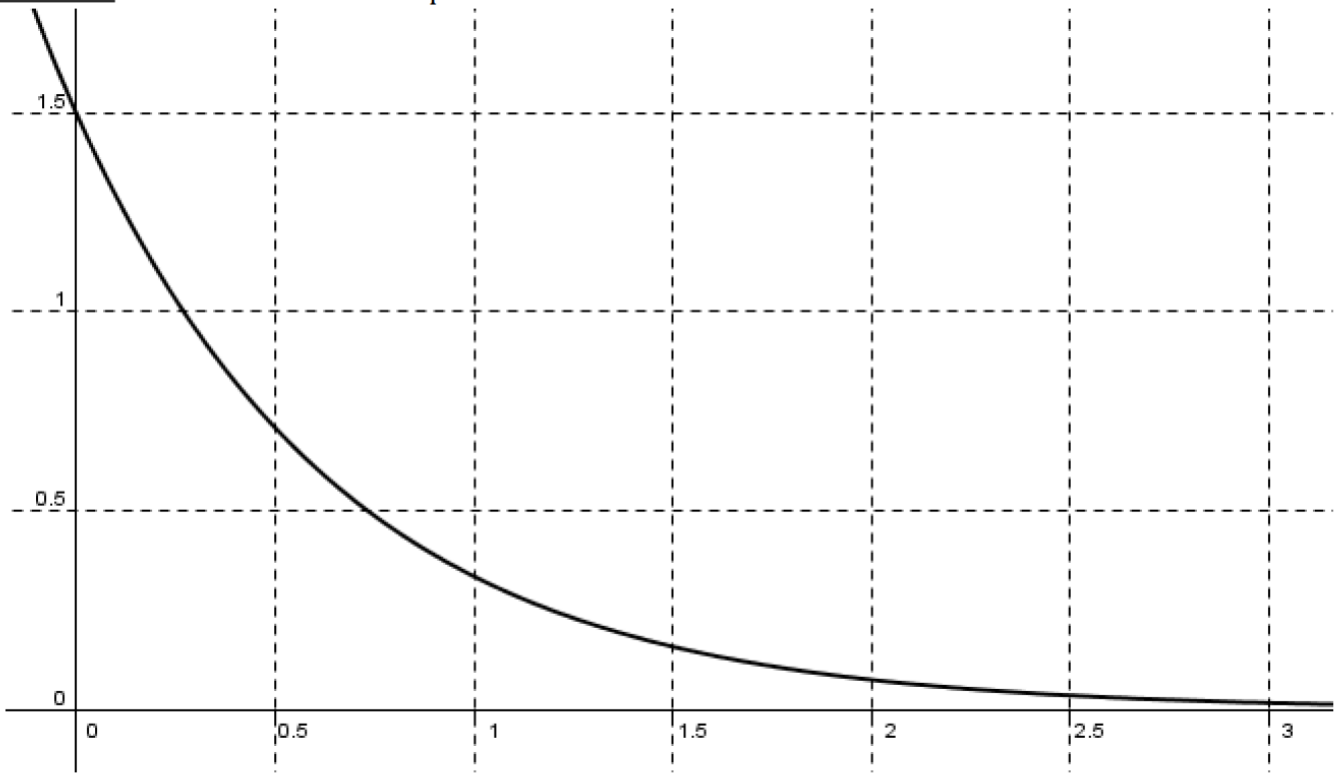
c) On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - \frac{1-e^{-n}}{2n(e-1)} \leq S_n \leq 1$.

Donner $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE N°3 : 25' 5 points

Soit une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Partie A : La courbe ci-dessous représente la fonction densité associée :



1. Interpréter sur le graphique la probabilité $p(X \leq 1)$

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ .

PartieB : On pose λ = 1,5.

1. Calculer $p(X \leq 1)$. On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3}près par excès.

2. Calculer $p(X \geq 2)$

3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante :

$$p(1 \leq X \leq 2) = 0{,}173 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

4. Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$F(x) = \int_0^x 1{,}5e^{-1{,}5t}tdt$$

Déterminer la limite quand $x \mapsto +\infty$ de $F(x)$.

On obtient ainsi l'espérance de la variable X.

Partie C : Une machine outil fabrique des cylindres.

On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre λ = 1,5.

* si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté

* si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.

* si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,916 à 10^{-3}près.

b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à des tirages successifs avec remise.

a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?